Rapport sur l'épreuve de mathématiques MPI1 2012 par Vincent Sécherre (concepteur et correction) et Nicolas Curien, Thomas Haettel, Jean-Marie Mirebeau et Pierre Simon (correcteurs)

L'épreuve de 6 heures de mathématiques de la session 2012 portait sur les polynômes à plusieurs variables et était inspiré d'un résultat de David Hilbert sur la théorie des invariants : il s'agissait de démontrer que tous les invariants polynomiaux (sous l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$) des polynômes homogènes d'ordre fixé en deux variables peuvent s'exprimer polynomialement en fonction seulement d'un nombre fini d'entre eux (question V.6). L'épreuve était longue et comportait des questions de difficultés très variées. Aucun candidat n'a fini l'épreuve et la partie **V** n'a quasiment jamais été abordée. Bien que de nombreuses questions faciles (montrer la linéarité ou le caractère polynomial de certaines applications) parsemaient l'épreuve, le jury a porté une attention particulière aux candidats qui abordaient/traitaient des questions difficiles et qui ne cédaient pas à la tentation du "grappillage" de points. De manière générale et comme les années précédentes, les correcteurs ont été très sensibles à la qualité de la rédaction ainsi qu'à la précision/concision des arguments donnés : les correcteurs n'ont pas pour rôle de chercher à deviner ce que les candidats ont bien voulu dire. Nous avons également récompensé les candidats qui, sans donner des solutions complètes aux questions dures, y identifiaient les problèmes et proposaient des idées originales.

Néanmoins, *le jury a été très surpris par le niveau plus que moyen d'une majorité des candidats en algèbre linéaire basique.* Nous ne citerons ici que les deux plus flagrantes erreurs retrouvées dans plus de 50% des copies :

- Pour montrer que plusieurs sous-espaces vectoriels sont en somme directe, beaucoup de candidats se contentent de vérifier que les intersections deux à deux sont réduites à $\{0\}$ (voire que leur intersection complète est réduite à $\{0\}$).
- De nombreuses copies utilisent un théorème (faux) de "base extraite" qui consisterait en l'énoncé suivant : Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie. Si $(e_0, e_1, ..., e_n)$ est une base de E, alors on peut extraire de cette base une base de F.

La définition de l'idéal engendré par une partie est aussi très approximative pour la plupart des candidats qui ont abordé les questions **III.6.a.b**. Il est très regrettable que des erreurs si grossières soient commises après deux voire trois années de classes préparatoires.

Ces remarques générales faites, voyons le déroulement du problème.

Partie I. Cette partie introduisait et étudiait les fonctions polynomiales homogènes. C'est ici qu'on été concentrées les erreurs grossières d'algèbre linéaire citées ci-dessus. Plus précisément :
1. a été traitée dans presque tous les cas. Une trop grande proportion oublie cependant de prouver la réciproque (toute fonction constante est homogène de degré 0).
2. Quasiment tous les candidats prouvent correctement que $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]_k$ est un sev. En revanche l'exhibition d'une base (avec la preuve que c'en est une !) a donné lieu à beaucoup de fantaisie. Le calcul de la dimension n'a été réalisé correctement que par une faible partie des candidats.
3. Voir remarques générales.
4.a. Cette question a été, dans l'ensemble, assez bien traitée.

4.b. Le sens facile (u isomorphisme implique $f \mapsto f \circ u$ isomorphisme) a été traité majoritairement. La réciproque était plus subtile et a permis de reconnaître les candidats à l'aise en algèbre linéaire.

Partie II. Les deux premières questions de cette partie basées sur la réduction des formes quadratiques ont malheureusement bloqué beaucoup de candidats et les ont empêché de résoudre la question **II.5**. Les questions intermédiaires étaient quant à elles faciles.
1.a. 1.b. n'ont été traitées entièrement que par une poignée de candidats. Le jury a accepté les raisonnements basés sur la réduction des formes quadratiques même s'il a été plus sensible aux manipulations élémentaires de matrices. À noter que certains candidats invoquaient le théorème de réduction des matrices hermitiennes alors que les matrices considérées étaient symétriques.
2.a. Question généralement bien traitée même si peu de candidats ont fait appel à **I.4.a.**.
2.b. a généralement été bien traitée. À noter que certaines copies prétendent que $x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est linéaire pour appliquer **I.4.a**.
3. Bien traitée dans l'ensemble.
4. Assez peu de candidat ont donné des arguments précis. Une majorité cependant a évoqué l'équivalence des normes en dimension finie.
5. Les questions **1.a.** et **1.b.** étant nécessaires pour répondre ici, cette question a été peu abordée. L'unicité a toutefois été prouvée dans un certain nombre de copies.

Partie III. Cette partie commençait par une série de questions à propos de l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^n$ afin d'aboutir à la question **4**. Les questions suivantes (en particulier les **5. 6.c** et **7**) qui avaient pour but de montrer que $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ est noetherien étaient très difficiles et ont permis de reconnaître les excellents candidats.
1. 2. 3. Bien traitées dans l'ensemble.
4. La majorité des copies abordait et comprenait cette question mais les preuves étaient le plus souvent incomplètes. Peu de candidats prouvaient par exemple que la contribution au coefficient dominant de fg ne provenait *que* du produit des coefficients dominants de f et g et montraient donc seulement $\deg(fg) \preceq \deg(f) + \deg(g)$.
5. Cette question difficile n'a été résolue entièrement que par une poignée de candidats. Beaucoup confondaient l'ordre $\preceq$ avec l'ordre (non total) $\alpha \leq \beta \iff \beta_i - \alpha_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.
6.a. Cette question, pas excessivement difficile n'a malheureusement pas été bien traitée. On retrouve souvent le fait imaginaire $X^\beta \in I(\Lambda)$ si et seulement il existe un polynôme P et $\alpha \in \Lambda$ tel que $X^\beta = P \cdot X^\alpha$.
6.b. Même remarque qu'à la question précédente même si l'erreur précédente était moins légion.
6.c. n'a quasiment jamais été traitée. Certains candidats ont néanmoins donné des idées intéressantes qui ont séduit le jury.
7. Cette question n'a été comprise que par une infime partie. La plupart de ceux qui s'y essayaient tentant de prouver que l'idéal I et l'idéal engendré par les $X^{\deg(f)}$ étaient identiques...
8. Une question assez classique qui a été traitée dans quelques copies.

IV. Cette partie permettait aux candidats de raccrocher dans le sujet avec des questions d'algèbre linéaire plus classique. Les notations ainsi que les manipulations calculatoires demandées ont pu permettre de juger de la qualité technique des copies.
1.a.b. La linéarité était évidente. Le jury attendait tout de même une preuve du fait que les

endomorphismes considérés prenaient des valeurs dans les ensembles indiqués.
2. Question assez bien traitée dans l'ensemble.
3. Voir remarques générales sur les raisonnements en algèbre linéaire.
4.a Quasiment tous les candidats écrivent $D_i(X_i^n) = X_i^{n-1}$ sans se pré-occuper du cas $n = 0$.
4.b. Cette question techniquement difficile a été généralement bien traitée lorsqu'abordée.
4.c. La difficulté de cette question résidait dans le fait que le nombre p variait. Certains candidats, ne s'en étant pas rendu compte, ont introduit une seconde erreur manifestement volontaire dans la suite de leurs calculs pour aboutir au résultat demandé. Il va sans dire qu'une telle attitude inspire de la méfiance aux correcteurs.
4.d. a été correctement traitée par une poignée de candidats.